1.3 L'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes et équations différentielles linéaires sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ (205, 208, 209, 220, 221, 246)

Dans ce développement, je propose de montrer que l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes est isomorphe isométriquement à l'algèbre $\ell^1(\mathbb{Z})$ munie de la convolution discrète, ce qui permettra de résoudre certaines équations différentielles linéaires sur $\ell^1(\mathbb{Z})$. Pour la leçon 209, je propose de prouver le lemme de Wiener disant que toute fonction de l'algèbre de Wiener ne s'annulant pas a son inverse dans l'algèbre de Wiener. Ce résultat se base énormément sur la densité des polynômes trigonométriques dans cette algèbre.

Définition 1.5 (L'algèbre de Wiener)**.** On appelle algèbre de Wiener l'ensemble W défini comme suit :

$$W = \left\{ f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle|\; \|f\|_W := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty \right\}.$$

Proposition 1.6 (Propriétés de l'algèbre de Wiener)**.**

1. W est un sev de $\mathscr{C}^0_{2\pi}$ dont toutes les fonctions sont somme de leur série de Fourier.
2. $(W, +, \cdot, \times, \|\cdot\|_W)$ est une algèbre de Banach et l'application :

$$\begin{array}{rcrcl} \Theta & : & (W, +, \cdot, \times) & \longrightarrow & (\ell^1(\mathbb{Z}), +, \cdot, \star) \\ & & f & \longmapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

   est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach. Rappelons que la loi $\star$ sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est définie ainsi :

$$\forall u, v \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad (u \star v)_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j v_{n-j}.$$

3. Les polynômes trigonométriques sont denses dans $(W, \|\cdot\|_W)$. Plus précisément on a :

$$\forall f \in W, \quad S_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{\|\cdot\|_W} f.$$

4. Les inclusions $(W, \|\cdot\|_W) \hookrightarrow \left(\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty\right)$ et $\left(\mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\mathscr{C}^1}\right) \hookrightarrow (W, \|\cdot\|_W)$ sont continues.

Démonstration. On va prouver les deux premières assertions ensemble. Posons l'application suivante :

$$\begin{array}{rcrcl} \Phi & : & \ell^1(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ & & (u_j)_{j\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & x \mapsto \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j e^{ijx}. \end{array}$$

Φ est bien définie car, pour toute suite $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$, la série de fonctions :

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j e^{ijx}$$

est normalement convergente, donc uniformément convergente. Cette série est donc continue et, par 2π-périodicité des exponentielles complexes, 2π-périodique. On remarque en outre le fait suivant :

$$\forall u \in \ell^1(\mathbb{Z}),\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\Phi(u)) = u_n.$$

Ainsi, $\Phi\left(\ell^1(\mathbb{Z})\right) \subset W$ et :

$$\Theta \circ \Phi = \mathrm{id}_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

Enfin, pour tout $f \in W$, la série de Fourier de f :

$$x \mapsto \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j(f) e^{ijx}$$

est bien définie et continue par convergence normale de la série et possède les mêmes coefficients de Fourier que f. Par injectivité des coefficients de Fourier, on a donc que f est égale à la somme de sa série de Fourier et donc :

$$\Phi \circ \Theta = \mathrm{id}_W.$$

Ainsi, Θ est un isomorphisme entre W et $\ell^1(\mathbb{Z})$ d'inverse Φ et, par définition de $\|\cdot\|_W$, c'est une isométrie. On a également montré que W était un sev de $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ puisque f est somme de sa série de Fourier et que celle-ci est normalement convergente. Enfin, on remarque le fait suivant :

$$\forall u, v \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad \Phi(u \star v)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j v_{n-j} e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j e^{ijx} v_{n-j} e^{i(n-j)x}.$$

Or, u et v sont dans $\ell^1(\mathbb{Z})$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j||v_{n-j}| &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_j||v_{n-j}| && \text{(Fubini-Tonnelli)} \\ &= \|u\|_1 \|v\|_1. && \text{(Changement d'indice dans la deuxième somme)} \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour obtenir :

$$\forall u, v \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad \Phi(u \star v)(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(u_j e^{ijx} \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{n-j} e^{i(n-j)x} \right) = \Phi(u)(x) \times \Phi(v)(x).$$

Ainsi, Φ (et donc Θ également) est un isomorphisme isométrique d'algèbres. $\ell^1(\mathbb{Z})$ étant une algèbre de Banach, il en est donc de même pour W.
Pour le troisième point, on a clairement que les polynômes trigonométriques sont inclus dans W et, puisque tout $f \in W$ est somme de sa série de Fourier, on a :

$$\|f - S_N(f)\|_W = \sum_{|j| \geqslant N+1} |c_j(f)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

car la suite des coefficients de Fourier de f est absolument convergente. Cela montre donc bien que les polynômes trigonométriques sont denses dans $(W, \|\cdot\|_W)$. Pour le point 4, si $f \in W$, alors f s'écrit comme la somme de sa série de Fourier et on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| = \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j(f) e^{ijx} \right| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j(f)| = \|f\|_W.$$

Ainsi :

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_W.$$

Pour finir, si $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors :

$$\forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad c_j(f) = \frac{1}{ij} c_j(f').$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a que $f \in W$ avec l'estimation suivante :

$$\|f\|_W \leqslant |c_0(f)| + \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{j^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j(f')|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|f\|_\infty + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|f'\|_2 \leqslant \|f\|_\infty + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|f'\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|f\|_{\mathscr{C}^1}.$$

□

Théorème 1.7 (Wiener)**.** Soit $f \in W$ tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$. Alors $\frac{1}{f} \in W$.

Démonstration. Soit $f \in W$ ne s'annulant pas. Par continuité de f et par compacité de $[-\pi, \pi]$, $|f|$ atteint son minimum. Notons-le m. f ne s'annulant pas, on a nécessairement $m > 0$. D'après ce qu'on a vu plus haut, on a :

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_W} f.$$

Prenons alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ de sorte que :

$$\|S_{n_0}(f) - f\|_W \leqslant \frac{m}{3}$$

et notons $g := S_{n_0}(f)$. On a donc que $g \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\|g - f\|_\infty \leqslant \frac{m}{3}$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(x)| \geqslant |f(x)| - |g(x) - f(x)| \geqslant m - \frac{m}{3} = \frac{2m}{3} > 0.$$

Ainsi, g ne s'annule pas. Donc $\frac{1}{g} \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Ainsi, d'après le point 4 de notre proposition, $\frac{1}{g} \in W$ avec une estimation de la norme W de $\frac{1}{g}$. On va montrer que f est inversible dans W en montrant que $\frac{f}{g}$ est inversible dans W. Pour cela, on montre que la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{f}{g}\right)^n$$

est absolument convergente dans $(W, \|\cdot\|_W)$, qui est un Banach ! On pourrait se dire alors qu'il suffit de montrer que :

$$\left\|1 - \frac{f}{g}\right\|_W < 1,$$

cependant, on se rend compte que :

$$\left\|1 - \frac{f}{g}\right\|_W \leqslant \left\|\frac{1}{g}\right\|_W \frac{m}{3}$$

avec :

$$\frac{m}{3}\left\|\frac{1}{g}\right\|_W \geqslant \frac{m}{3}\frac{1}{\|g\|_W} \geqslant \frac{1}{1 + \frac{3}{m}\|f\|_W},$$

qui est une quantité qui peut être arbitrairement proche de 1 ! Ainsi, il est difficile d'avoir directement un bon contrôle de $\left\|1 - \frac{f}{g}\right\|_W$, bien que $\left\|1 - \frac{f}{g}\right\|_\infty$ puisse être rendu arbitrairement petit. Il faut donc pouvoir estimer plus finement la quantité :

$$\left\|\left(1 - \frac{f}{g}\right)^n\right\|_W.$$

D'après ce qu'on a vu sur g et l'estimation de la norme W par rapport à la norme de $\mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|\frac{1}{g^n}\right\|_W &\leqslant \left\|\frac{1}{g^n}\right\|_\infty + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left\|\frac{-ng'}{g^{n+1}}\right\|_\infty \\
&\leqslant \left\|\frac{1}{g}\right\|_\infty^n \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} n\|g'\|_\infty \left\|\frac{1}{g}\right\|_\infty\right) \\
&\leqslant \left(\frac{3}{2m}\right)^n \left(1 + \frac{n\pi\sqrt{3}}{2m}\|g'\|_\infty\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, par propriété de norme d'algèbre de $\|\cdot\|_W$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\| \left(1 - \frac{f}{g}\right)^n \right\|_W \leqslant \left\| \frac{1}{g^n} \right\|_W \|g - f\|_W^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{n\pi\sqrt{3}}{2m} \|g'\|_\infty\right).$$

Le membre de droite étant le terme général d'une série convergente, on a le résultat attendu ! $\square$

Théorème 1.8 (Résolution de certaines équations différentielles sur $\ell^1(\mathbb{Z})$)**.** Soit $P \in \mathbb{C}\left[X, \frac{1}{X}\right]$ un polynôme de Laurent et $\tau \in \mathscr{L}_c\left(\ell^1(\mathbb{Z})\right)$ l'opérateur de décalage :

$$\begin{array}{rccc} \tau & : & \ell^1(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \ell^1(\mathbb{Z}) \\ & & (u_j)_{j \in \mathbb{Z}} & \longmapsto & (u_{j-1})_{j \in \mathbb{Z}}. \end{array}$$

On considère l'équation différentielle suivante, posée sur $\ell^1(\mathbb{Z})$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v'(t) & = & P(\tau) \cdot v(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \\ v(0) & = & v_0. \end{array} \right.$$

L'unique solution v de cette équation différentielle est donnée par la formule suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad v(t) = v_0 \star K(t)$$

avec :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad K_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(tP\left(e^{ix}\right) - ijx\right) \mathrm{d}x.$$

Démonstration. On sait, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, étant donné que $\left(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1\right)$ est un espace de Banach, et que $P(\tau) \in \mathscr{L}_c\left(\ell^1(\mathbb{Z})\right)$, que l'équation différentielle considérée admet une unique solution v. On va transformer cette équation différentielle sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ en une équation différentielle linéaire plus facile à résoudre sur W. Pour tout $t > 0$, on pose :

$$f(t) = \Phi(v(t)) \in W.$$

Étant donné que v est solution de l'équation différentielle, alors, en notant plus explicitement :

$$P = \sum_{k=-n}^{n} a_k X^k,$$

on a :

$$\begin{aligned} \forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(t)(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j'(t) e^{ijx} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-n}^{n} a_k v_{j-k}(t) e^{ijx} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} a_k \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_{j-k}(t) e^{ijx} \\ &= \left(\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}\right) \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j(t) e^{ijx}\right) \\ &= P\left(e^{ix}\right) \times f(t)(x). \end{aligned}$$

f vérifie donc l'équation différentielle suivante sur W :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} f'(t) & = & P\left(e^{i\cdot}\right) f(t) & \forall t > 0 \\ f(0) & = & f_0 := \Phi(v_0). & \end{array} \right.$$

Cette équation différentielle est alors très simple à résoudre ! L'unique solution de cette équation est la fonction $t \mapsto f(t)$ suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad f(t) = f_0 \times \exp\left(tP\left(e^{i\cdot}\right)\right).$$

Le terme $\exp\left(tP\left(e^{i\cdot}\right)\right)$ est à comprendre comme une série :

$$\exp\left(tP\left(e^{i\cdot}\right)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k P\left(e^{i\cdot}\right)^k}{k!}.$$

Cependant, par continuité des évalutaions en $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{ev}_x & : & W & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp\left(tP\left(e^{i\cdot}\right)\right)(x) = \mathrm{ev}_x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k P\left(e^{i\cdot}\right)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k P\left(e^{ix}\right)^k}{k!} = \exp\left(tP\left(e^{ix}\right)\right),$$

ce qui est bien ce qu'on espérait, même si ce n'était pas évident au premier abord. La solution de l'équation différentielle de départ est donc la fonction $t \mapsto \Theta(f(t))$, qui s'exprime ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad v(t) = \Theta\left(\Phi(v_0) \times \exp\left(tP\left(e^{i\cdot}\right)\right)\right) = v_0 \star K(t)$$

par propriété de morphisme d'algèbre de Θ, où la fonction $t \mapsto K(t)$ s'exprime ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ \forall j \in \mathbb{Z}, \quad K_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(tP\left(e^{ix}\right) - ijx\right) \mathrm{d}x.$$

Cela conclut donc la preuve ! □

Peut-être est-il bienvenu d'illustrer ce résultat par un exemple parlant, alors faisons-le. On souhaite résoudre l'équation de la chaleur discrète dans $\ell^1(\mathbb{Z})$:

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad v_j'(t) = v_{j-1}(t) - 2v_j(t) + v_{j+1}(t).$$

Cette équation différentielle est de la forme précédente avec le polynôme de Laurent P suivant :

$$P = X - 2 + \frac{1}{X}.$$

Les solutions de cette équation sont donc de la forme $v_0 \star \mathscr{G}(t)$ où le noyau de la chaleur discret $\mathscr{G}(t)$ s'exprime ainsi :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \mathscr{G}_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(t\left(e^{ix} - 2 + e^{-ix}\right) - ijx\right) \mathrm{d}x.$$

On peut simplifier cette écriture en remarquant le fait suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ix} - 2 + e^{-ix} = 2\cos(x) - 2.$$

Ainsi, on a, après changement de variables :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \mathscr{G}_j(t) = \frac{e^{-2t}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(2t\cos(x) - ijx\right) \mathrm{d}x.$$

Enfin, en découpant l'intégrale en 2, entre $-\pi$ et 0 et entre 0 et π, on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \mathscr{G}_j(t) = \frac{e^{-2t}}{\pi} \int_{0}^{\pi} \exp\left(2t\cos(x)\right) \cos(jx) \mathrm{d}x.$$

On peut montrer (c'est dur !) que le noyau $\mathscr{G}_j(t)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall t > 0, \quad \forall j \in [\![-t, t]\!], \quad 0 < \mathscr{G}_j(t) \leqslant \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{j^2}{16t^2}\right).$$

Cette résolution et l'inégalité permettent alors d'analyser des équations de type réaction-diffusion sur $\mathbb{Z}$:

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad I_j'(t) = d\left(I_{j-1}(t) - 2I_j(t) + I_{j+1}(t)\right) + f(I_j(t))$$

où f est une non-linéarité *bistable*, par exemple la cubique :

$$f(u) = u(1-u)(u-a)$$

avec $a \in (0,1)$. Cette estimation sur le noyau de la chaleur permet de montrer que pour un coefficient de diffusion d assez grand, la solution I_j^ℓ de l'équation différentielle ci-dessus, de condition initiale :

$$I_j^\ell(0) = \mathbb{1}_{[\![-\ell,\ell]\!]}$$

converge vers la suite nulle uniformément en j.